INSTITUT NATIONAL DE LA STATISTIQUE
ET DES ÉTUDES ÉCONOMIQUES

CONCOURS POUR L'ADMISSION D'ÉLÈVES TITULAIRES STATISTICIENS ÉCONOMISTES
A L'ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ADMINISTRATION ÉCONOMIQUE

Juin 1981. — Option MATHÉMATIQUES

TROISIÈME COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 2 heures

Notations : On considère trois intervalles de $\mathbb{R}$:

$$I_1 =]-\infty, -1], I_2 = [-1,1], I_3 = [1, +\infty[$$

et on note $\mathcal{D}$ la réunion de leurs trois intérieurs : $\mathcal{D} = \mathbb{R} - \{-1, +1\}$.

Soit f la fonction : $\forall x \in \mathcal{D} : f(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right) \operatorname{Arctg} \frac{x^2}{x^2 - 1}$;

f est donc indéfiniment dérivable dans $\mathcal{D}$. Pour i appartenant à $\{1, 2, 3\}$ on désigne par g_i la fonction définie et continue dans I_i et dont la restriction à l'intérieur de I_i coïncide avec celle de f. On appelle (C) la réunion des courbes représentatives de g_1, g_2, g_3; en d'autres termes (C) est obtenue en adjoignant à la courbe représentative de f les 4 points d'abscisse $+1$ (resp -1) et d'ordonnée les limites à gauche et à droite de f en $+1$ (resp -1).

Il est recommandé aux candidats de traduire graphiquement (7e question) les résultats qu'ils auront obtenus, même si ceux-ci sont incomplets.

D'autre part l'attention des candidats est attirée sur le fait qu'il est demandé très peu de valeurs numériques approchées et que les calculatrices ne sont utilisées que pour la fin des questions (6° *a.*) et (6° *b.*).

Tournez la page S. V. P.

1° Montrer, en les déterminant, qu'il existe des réels a, b_0, b_1, b_2, k tels que $f(x) - ax - b_0 - \frac{b_1}{x} - \frac{b_2}{x^2} \sim \frac{k}{x^3}$ pour x tendant vers $\pm\infty$.

Quel est, selon les valeurs de x dans $\mathcal{D}$, le signe de $f(x) - ax - b_0$?

2° *a.* Déterminer les développements limités d'ordre 5 des fonctions g_2 et g_3 pour x tendant vers 1 respectivement à gauche et à droite.

b. Déterminer les développements limités d'ordre 5 des fonctions g_1 et g_2 pour x tendant vers -1 respectivement à gauche et à droite.

3° Calculer $f'(x)$; les fonctions g_1', g_2', g_3' sont-elles semi-continues pour $x = \pm 1$?

Montrer que $f''(x)$ a même signe qu'un polynôme $P(x)$ de degré 5. Déterminer les sens des variations des fonctions P″, P′, P afin de trouver le nombre des racines réelles de P et de placer celles-ci par rapport aux nombres

$$-1, \ -\frac{1}{2}, \ 0, \ +1.$$

4° Soit α la plus petite racine de P. La méthode de Newton (ou méthode de la tangente) appliquée à l'équation $P(x) = 0$ en $x = -1$ fournit une valeur approchée $\bar{\alpha}$ de α. ($\bar{\alpha}$ sera laissé sous forme de fraction irréductible.) Établir que : $\bar{\alpha} < \alpha < -1$.

Démontrer que : $\alpha < x < -1 \Rightarrow 0 < f''(x) < 1$. La formule des accroissements finis s'applique-t-elle à la fonction g_1' sur $[\alpha, -1]$? Montrer que $g_1'(\alpha)$ est un nombre positif (et même supérieur à 0,4).

5° Dresser le tableau des variations de f en précisant le sens de la concavité de (C); la racine de f' supérieure à 1 est notée x_1.

6° *a.* Donner les expressions de $f'\left(\frac{5}{4}\right)$ et $f'\left(\frac{3}{2}\right)$ comme somme (ou différence) d'un Arctg et d'une fraction irréductible; en déduire des valeurs décimales approchées à 10^{-6} près de ces nombres.

b. Donner un encadrement de $f(x_1)$. Les candidats donneront d'abord les 2 valeurs exactes avant d'évaluer, à 10^{-4} près, les bornes de cet encadrement.

7° Donner l'allure de (C); le repère étant orthonormé on prendra 5 cm pour unité. Le graphique devra montrer clairement le sens de la concavité. On dessinera d'une part la courbe (C) et d'autre part les diverses droites remarquables rencontrées dans les questions 1 et 2 avec 2 couleurs différentes d'encre ou de crayon.

1321

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail